Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K et $\mathfrak{L}$ désigne l'espace vectoriel sur K des endomorphismes de E.

Si $q(X) = a_0 + a_1X \ldots + a_kX^k$ est un polynôme de K[X], et si a_k est différent de 0, a_k est le *coefficient dominant* de $q(X)$. Pour tout élément f de $\mathfrak{L}$, on définit alors l'endomorphisme $q(f)$ par

$$q(f) = a_0 I + a_1 f^1 + \ldots + a_k f^k,$$

où I est l'application identique de E, où $f^1 = f$ et où $f^h = f^{h-1} \circ f$ pour tout entier h strictement supérieur à 1. Il est facile de vérifier que si $q = ab$, alors $q(f) = a(f) \circ b(f)$.

Si V est un élément de E, on note $q(f)[V]$ la valeur prise en V par l'endomorphisme $q(f)$.

I

Soit f un élément non nul de $\mathfrak{L}$.

1° Montrer que l'idéal $\mathfrak{J}$ de K[X] formé des polynômes $q(X)$ tels que $q(f)$ est l'endomorphisme nul n'est pas l'idéal nul.

2° Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme $p(X)$ de K[X] vérifiant les trois conditions suivantes :

a. Le coefficient dominant de $p(X)$ est égal à l'élément unité du corps K.

b. p appartient à l'idéal $\mathfrak{J}$.

c. Tout élément de $\mathfrak{J}$ est un multiple de $p(X)$.

On appellera $p(X)$ *le polynôme minimal* de f.

II

Soit u un élément non nul de l'espace vectoriel E et soit f un élément non nul de $\mathfrak{L}$.

Soit s le plus grand entier tel que $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u)$ soient linéairement indépendants et soit S le sous-espace vectoriel de E engendré par ces s vecteurs.

1° Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme $P_u(X)$ de K[X] de degré s tel que $P_u(f)[u] = 0$ et de coefficient dominant égal à l'unité de K.

Ce polynôme $P_u(X)$ *sera appelé l'ordre de* u (relatif à f).

2° Soit f' la restriction de f à S. Comparer $P_u(X)$ et le polynôme minimal de f'.

3° Démontrer que le polynôme minimal de f est un multiple de l'ordre de u.

III

Si f est un endomorphisme de E, on dit que les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_k$ de E engendrent E relativement à f, si pour tout x de E, il existe une suite $\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_k(X)$ de polynômes de K[X] tels que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(f)[e_i].$$

Dans ce cas, on dit encore que $e_1, e_2, \ldots, e_k$ est un système générateur fini de E relativement à f.

Soit f un endomorphisme non nul de E.

1° Prouver l'existence d'un système générateur fini de E relativement à f.

2° Soit $e_1, e_2, \ldots, e_k$ un système générateur fini de E relativement à f, et soient $P_{e_1}(X), P_{e_2}(X), \ldots, P_{e_k}(X)$ leurs ordres respectifs (relatifs à f). [Pour la définition d'ordre, cf. II 1°.]

Déterminer le polynôme minimal de f en fonction de $P_{e_1}(X), \ldots, P_{e_k}(X)$.

.../...

E.N.S. SAINT-CLOUD & FONTENAY 1978

3° Soient $y_1, y_2, \ldots, y_k$ des vecteurs non nuls de E dont les ordres relatifs à f sont respectivement $P_1(X), \ldots, P_k(X)$.

Démontrer que si les polynômes $P_i(X)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, sont deux à deux premiers entre eux, l'ordre relatif à f de l'élément $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ est égal au produit des $P_i(X)$.

4° Montrer que le polynôme minimal de tout endomorphisme g de E est égal à l'ordre relatif à g de l'un des vecteurs de E.

5° *Déduire des questions précédentes* que le degré du polynôme minimal d'un endomorphisme de E est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace E.

IV

Soit f un élément non nul de l'espace vectoriel E de dimension n.

Nous dirons que E est cyclique (relativement à f) s'il existe un vecteur u de E tel que les vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)$ engendrent E. On dira aussi dans ce cas que l'endomorphisme f est cyclique et que le vecteur u est un générateur de l'espace cyclique E, (associé à f).

1° Montrer que si un endomorphisme f est cyclique, les seuls éléments de $\mathfrak{L}$ qui permutent avec f (i.e. les endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$), sont les éléments de $\mathfrak{L}$ de la forme $q(f)$, où $q(X)$ est un polynôme de K[X].

2° Montrer qu'un endomorphisme f est cyclique, si et seulement si son polynôme minimal est de degré n.

3° Soit u un vecteur générateur de E associé à l'endomorphisme cyclique f et soit $P(X)$ le polynôme minimal de f. Démontrer que si $P(X) = P_1(X) \ldots P_t(X)$ où les polynômes $P_i(X)$, $1 \leqslant i \leqslant t$, sont deux à deux premiers entre eux, E est somme directe de t espaces vectoriels cycliques.

4° Soit toujours u un vecteur générateur de E associé à l'endomorphisme cyclique f. Supposons que le polynôme minimal de f soit de la forme $P(X) = R(X)^k$ où $R(X)$ est un polynôme irréductible de K[X] de degré q.

a. Montrer que les vecteurs

$$e_{aq+b} = f^{b-1} \circ [R(f)]^{k-a-1}[u], \quad 0 \leqslant a < k, \quad 1 \leqslant b \leqslant q,$$

forment une base de E. Une telle base est dite « *adaptée* » à f.

b. Quelle est la matrice de f dans cette base?

Pour écrire cette matrice, on utilisera exclusivement les deux $q \times q$ matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & a_{q-1} \end{pmatrix}$$

sachant que $R(X) = X^q - a_{q-1} X^{q-1} - a_{q-2} X^{q-2} \ldots - a_0$.

V

1° Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans une base e_1, e_2, e_3, e_4 est

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$ désigne le corps de complexes.

2° Soit f un endomorphisme de $\mathbb{Q}^4$ ($\mathbb{Q}$ désigne le corps des rationnels) dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est cyclique.

b. En utilisant les résultats et définitions du IV. 4°, on donnera une base de $\mathbb{Q}^4$ adaptée à f, et la matrice de f dans cette base.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail